本附加数学科课程
与
《中学课程纲要:附加数学(中四至中五)(1992)》
内容对照

本附加数学课程指引是由一九九二年编订之附加数学课程纲要修订而成，主要是删除或减少其中一些课题。为方便教师参考，这些课题以 ▭ 方格覆盖。说明及备注则列于 ▭ 方格内，让教师较易掌握教学的内容和深度。

3. 课　程

单元 1：数学归纳法原理

特定目标：

1. 理解数学归纳法的概念。
2. 熟习数学归纳法的步骤。
3. 在各方面应用数学归纳法。

内 容	时间分配	教 学 建 议
1.1 数学归纳法的概念	2	学生应认识到有些公式只对正整数才成立。例子包括等差级数及等比级数 n 项和的公式。 那些公式虽或可用其它方法求得，但亦可利用公式中的变量是正整数的特点，用另一种方法来证明。这种方法就是「数学归纳法」。 教师可先用一些简单但不常见的公式，以作说明。例如： $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 当 n = 1、2 及 3 时，这公式成立。我们预期这公式对所有正整数 n 都成立。但我们怎作保证呢？例如，当 n = 100 或 257 时，我们怎知道那公式仍然成立？这就须证明其有效性了。
1.2 数学归纳法的步骤	~~2~~ 3	数学归纳法的步骤可用一简单的例子带出，而不应一开始便引用一般命题 P(n)。所得结果可于稍后才总结为一般性。 教师应特别注重数学归纳法证明时的表达方式。以下是一个例子。

11

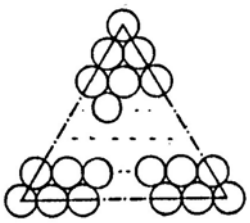
▭ 表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议
12		例 求证对所有正整数 n， $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 。 设 P(n) 为命题“$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$”。 当 n = 1， 左方 = 1 右方 = $\frac{1(1+1)}{2}=1$ ∴ 左方 = 右方 故 P(1) 成立。 假设 P(k)成立，即 $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 。 当 n = k + 1， 左方 = $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ = $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$ = $(k+1)(\frac{k}{2}+1)$ = $\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ = 右方 ∴ P(k + 1) 亦成立。 根据数学归纳法原理，P(n) 对所有正整数 n 皆成立。 用来介绍数学归纳法步骤的例子，不应涉及太多运算，否则会分散学生的注意力，而不能集中理解基本的论点。以下是另一些有用的例子：

内 容	时间分配	教 学 建 议
1.3 数学归纳法的应用 13	~~4~~ 5	$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 及 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ 教师如今可介绍一些较复杂的例子，以说明数学归纳法的效用。例如：证明对任何正整数 n， (1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$ (2) $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-2)2+n\cdot1$ = $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (3) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin n\alpha$ = $\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ 其中 α 并不等于 2π 的倍数。 (若学生已学过有关的三角函数公式，则此题可给学生作例子；否则可留待复习时用。) 除可用来证明级数和的公式外，数学归纳法的应用，还应包括以下各类： (1) 可整除性的证明，例如， (*a*) 7^n+3n-1 可被 9 整除 (*b*) 23^n-1 可被 11 整除 (*c*) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除 例 (*c*) 可证明如下： 设 P(n) 为“$a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除”。

表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议
		当 $n = 1$， $a^{2n-1} + b^{2n-1} = a + b$ $\therefore P(1)$ 成立。 假设 $P(k)$ 成立， 即 $a^{2k-1} + b^{2k-1} = m(a + b)$。 当 $n = k + 1$ 时， $a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1} = a^{2k+1} + b^{2k+1}$ $= a^2 \cdot a^{2k-1} + b^2 \cdot b^{2k-1}$ $= a^2 \cdot a^{2k-1} + a^2 \cdot b^{2k-1} - a^2 \cdot b^{2k-1} + b^2 \cdot b^{2k-1}$ $= a^2 (a^{2k-1} + b^{2k-1}) - (a^2 - b^2) b^{2k-1}$ $= a^2 m(a + b) - (a + b)(a - b) b^{2k-1}$ $= (a + b)[a^2 m - (a - b) b^{2k-1}]$， 而此式可被 $(a + b)$ 整除。 即 $P(k + 1)$ 亦成立。 根据数学归纳法原理，$P(n)$ 对所有正整数 n 成立。 (2) 简易不等式证明，例如， (*a*) 若 $x \geq -1$，则 $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (*b*) 对正数 a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$， $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ (*c*) $2^n > n^2$，其中 $n \geq 5$ 例 (*c*) 可证明如下： 设 $P(n)$ 为“$2^n > n^2$，其中 $n \geq 5$”。 当 $n = 5$， 左方 $= 2^5 = 32$ 右方 $= 5^2 = 25$

内 容	时间分配	教 学 建 议
		$\therefore$ 左方 > 右方。 $\therefore$ $P(5)$ 成立。 假设 $P(k)$ 成立， 即 $2^k > k^2$，其中 $k \geq 5$。 当 $n = k + 1$， $2^{k+1} - (k + 1)^2 = 2^{k+1} - k^2 - 2k - 1$ $= 2 \cdot 2^k - 2k^2 + k^2 - 5k + 3k - 15 + 14$ $= 2(2^k - k^2) + k(k - 5) + 3(k - 5) + 14 > 0$ $\therefore 2^{k+1} > (k + 1)^2$ $\therefore P(k + 1)$ 成立 根据数学归纳法原理，$P(n)$，而 $n \geq 5$，成立。 (3) 简易应用问题，例如求图中所示金字塔堆中共有球多少个球。  教师应提醒学生，在有些命题中，n 不是由 1 开始的。例如 $2^n > n^2$ 便须 $n \geq 5$。
	~~8~~ 10	

表示删去的内容